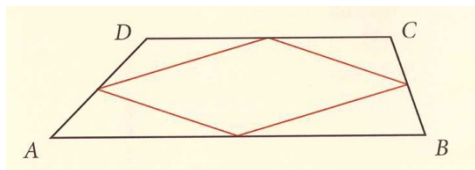


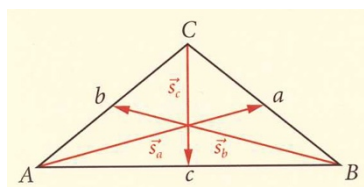
Aufgaben zu Anwendungen zur Vektorrechnung

- 1 Von einer Strecke AB mit dem Mittelpunkt M sind bekannt:
A(2/5) und M(-4/3).
Berechnen Sie B. ☐
- 2 Die Punkte A(3/7) und B(11/-1) sind gegenüberliegende Ecken eines Rechtecks.
Berechnen Sie den Mittelpunkt des Rechtecks. ☐
- 3 Die Punkte A(1/1), B(2/2) und C(3/-1) sind drei aufeinanderfolgende Ecken eines Parallelogramms.
Berechnen Sie die vierte Ecke. ☐
- 4.0 Von einem Parallelogramm ABCD kennt man die beiden aufeinanderfolgenden Eckpunkte A und B und den Diagonalschnittpunkt M.
Berechnen Sie C und D. ☐
- 4.1 A(-4/0), B(4/-2), M(2/1,5)
- 4.2 A(2/1/-3), B(6/-3/5), M(2,5/0,5/1)
- 5 Die Punkte D(-2/1), E(2/3) und F(4/-1) sind die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks ABC.
Berechnen Sie die Eckpunkte des Dreiecks. ☒
- 6.0 Gegeben ist das Viereck ABCD mit A(4/-2/5), B(7/9/-4), C(9/12/-2), D(6/1/7).
- 6.1 Beweisen Sie, dass das Viereck ein Parallelogramm ist. ☐
- 6.2 Berechnen Sie den Mittelpunkt des Vierecks. ☐
- 6.3 Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks ACD. ☐
- 7 Vom Dreieck ABC sind die Ecken A(1/1), B(4/7) und der Schwerpunkt S(1/4) gegeben.
Berechnen Sie C. ☒
- 8.0 Ein Dreieck hat die Eckpunkte A(t/-2t/-2t), B(-1/3+t/-4) und C(-2/t/4) mit $t \in \mathbb{R}$.
- 8.1 Prüfen Sie, ob es Zahlen $t \in \mathbb{R}$ gibt, dass $M_1(1/1/1)$ oder $M_2(2/-1/-7)$ der Mittelpunkt der Strecke [AB] ist. ☒
- 8.2 Prüfen Sie, ob es Zahlen $t \in \mathbb{R}$ gibt, dass $S_1(-1/1/0)$ oder $S_2(-1/2/0)$ der Schwerpunkt vom Dreieck ABC ist. ☒

- 9 Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. ●



- 10 Zeigen Sie, dass die vektorielle Summe der Seitenhalbierenden eines Dreiecks null ergibt. ●



- 11.0 Gegeben ist eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche durch folgende Punkte.
Grundfläche: $P_1(2/1/1)$, $P_2(7/1/1)$, $P_3(7/5/1)$, $P_4(2/5/1)$
Spitze: $P_5(4,5/3/6)$

- 11.1 Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem. 

- 11.2 Berechnen Sie die Spaltenvektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_3P_4}$, $\overrightarrow{P_4P_5}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ und $\overrightarrow{P_4P_2}$. ○

- 11.3 Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung von $\overrightarrow{P_1P_3}$, $\overrightarrow{P_4P_5}$ und $\overrightarrow{P_2P_5}$.
Ergänzen Sie diese drei Vektoren in der schon angefertigten Zeichnung. ○

- 11.4 Berechnen Sie $|\overrightarrow{P_2P_5}|$ und beschreiben Sie die Bedeutung dieser Zahl. ○

- 11.5 Berechnen Sie den Spaltenvektor $\overrightarrow{OM}$ vom Ursprung zum Mittelpunkt der Grundfläche. Zeichnen Sie den Vektor ein. ○

- 11.6 Geben Sie die Höhe der Pyramide an. ○

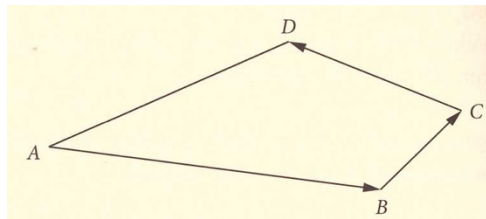
- 11.7 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Grundfläche der Pyramide. ○

- 12 Die Verbindungsstrecke zwischen zwei Seitenmittelpunkten eines Dreiecks nennt man Mittelparallele.
Zeigen Sie, dass jede Mittelparallele eines Dreiecks halb so lang ist wie die zugehörige Seite. ●

- 13 Der Punkt $C(7/6/9)$ hat bezüglich der drei Koordinatenachsen des Koordinatensystems einen zugehörigen Spiegelpunkt.
Bestimmen Sie die Koordinaten aller drei Spiegelpunkte. ●

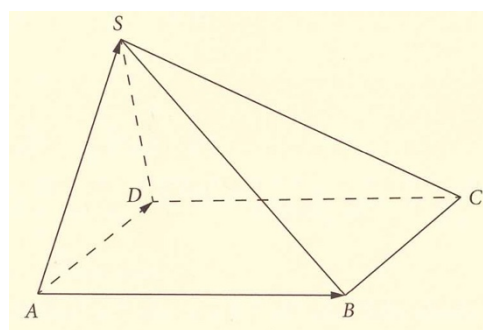
- 14 Ein beliebiges Viereck ABCD ist gegeben durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CD}$.

Drücken Sie $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{DB}$ durch die gegebenen Vektoren aus. ○



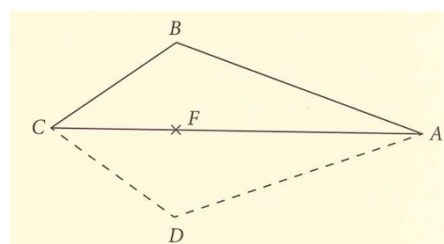
- 15 Eine schiefe Pyramide mit der Spitze S besitzt die rechteckige Grundfläche ABCD und ist durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AS}$ festgelegt.

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{DB}$ durch die drei gegebenen Vektoren aus. ⊗

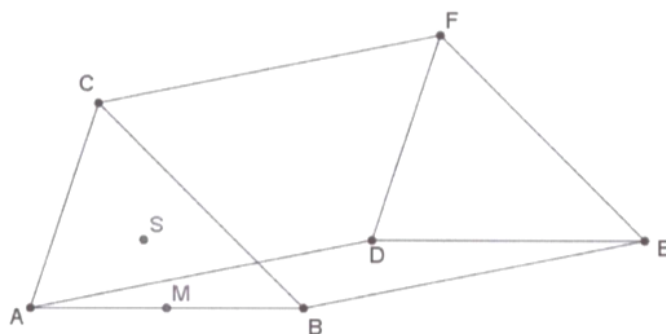


- 16 Gegeben sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC, das sich durch einen Punkt D zu einem Drachenviereck ABCD ergänzen lässt.

Beschreiben Sie eine Abfolge von Schritten zur rechnerischen Ermittlung der Koordinaten von D, wenn der Punkt F gegeben ist. ○



- 17 Das Dreieck ABC hat den Schwerpunkt S, somit gilt: $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{MC}$. M ist dabei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Das Dreieck ABC dient als Grundfläche des abgebildeten Prismas.



Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{BF}$.

Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{MS}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. 

Lösungen

1. $B(-10/1)$

2. Berechne Vektor $\overrightarrow{AB}$ und davon den Mittelpunkt $\Rightarrow M(7/3)$

3. Berechne Vektor $\overrightarrow{AB}$. Der Vektor $\overrightarrow{DC}$ muss gleich sein, da ABCD Parallelogramm ist
 $\Rightarrow D(2/-2)$

4. Ansatz: $2 \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$ bzw. $2 \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BD}$

4.1 $C(8/3), D(0/5)$

4.2 $C(3/0/5), D(-1/4-3)$

5. Ansatz: $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{d}, \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{e}, \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \vec{f}$

Durch Lösen des entstehenden Gleichungssystems erhält man dann A, B und C.
 $A(0/-3), B(-4/5)$ und $C(8/1)$

6.1 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

6.2 $M(\frac{13}{2}/5/\frac{3}{2})$

6.3 $S(\frac{19}{3}/\frac{11}{3}/\frac{10}{3})$

7. Ansatz: $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{s} \Rightarrow C(-2/4)$

8.1

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t-1 \\ 3-t \\ -4-2t \end{pmatrix}$$

Für $M_1(1/1/1)$ gibt es kein $t \in \mathbb{R}$, $M_2(2/-1/-7)$ ist Mittelpunkt für $t=5$.

8.2

$$\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} t-3 \\ 3 \\ -2t \end{pmatrix}$$

$S_1(-1/1/0)$ ist Schwerpunkt für $t=0$, für $S_2(-1/2/0)$ gibt es kein $t \in \mathbb{R}$.

9.

Ein beliebiges Viereck wird festgelegt durch:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b} \quad \overrightarrow{CD} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{M_4M_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \quad \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{M_4M_3} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{M_2M_4} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{M_1M_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{M_1M_4} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

10.

Ein beliebiges Dreieck wird festgelegt durch:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} \text{ und } \overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AM_2} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

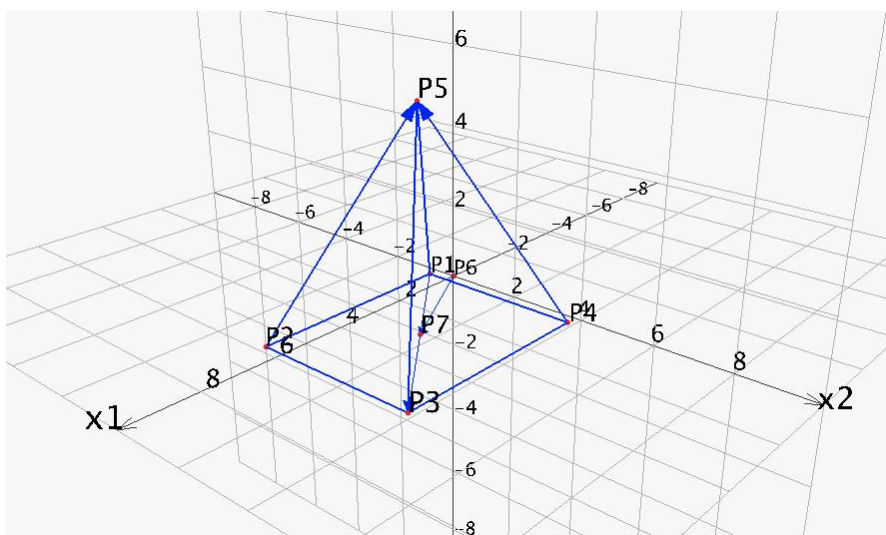
$$\overrightarrow{BM_3} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BM_3} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{CM_1} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AM_2} + \overrightarrow{BM_3} + \overrightarrow{CM_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{0}$$

11.1



$$11.2 \quad \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_3P_4} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_4P_5} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_4P_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11.3

$\overrightarrow{P_1P_3}$ ist eine Diagonale der Grundfläche

$\overrightarrow{P_4P_5}$ und $\overrightarrow{P_2P_5}$ sind Seitenkanten der Pyramide

11.4

$$|\overrightarrow{P_2P_5}| = \left| \begin{pmatrix} -2,5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6,25 + 4 + 25} = \sqrt{35,25} \approx 5,94$$

Die Länge einer Seitenkante der Pyramide beträgt etwa 5,94 cm.

$$11.5 \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{m} = \vec{p_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11.6

$$\overrightarrow{MP_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Höhe der Pyramide beträgt 5 LE.

$$11.7 \quad \text{Grundfläche}_{\text{Pyramide}} = |\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot |\overrightarrow{P_2P_3}| = 5 \cdot 4 = 20 \text{ FE}$$

12.

Ein beliebiges Dreieck wird festgelegt durch:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} \text{ und } \overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{M_3M_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{CA} = -\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{M_3M_2} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

13.

x_1 – Achse : Spiegelpunkt Z(7/0/0)

$$\vec{c}^* = \vec{z} + \overrightarrow{CZ} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

x_2 – Achse : Spiegelpunkt Z(0/6/0)

$$\vec{c}^* = \vec{z} + \overrightarrow{CZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

x_3 – Achse : Spiegelpunkt Z(0/0/9)

$$\vec{c}^* = \vec{z} + \overrightarrow{CZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

14. $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$

15.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BS} &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS} & \overrightarrow{CS} &= -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS} & \overrightarrow{DS} &= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AS} \\ \overrightarrow{CA} &= -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{DB} &= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

16. Der Punkt B wird am Punkt F gespiegelt, dabei ergibt sich der Punkt D durch folgende Formel: $\vec{d} = \vec{f} + \overrightarrow{BF}$.

17 $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \vec{c} - \vec{b} \right) = \frac{1}{6} \vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c}$